Сферическая геометрия

Михалев А.А. и Михалева Т.Б.

Студенты 1 курса магистратуры
«Преподавание математики и информатики»
Института фундаментальных наук КемГУ

Кемерово, 2016

Оглавление

Введение

Еще древние греки считали окружность (круг) и сферу (шар) идеальными формами. Подтверждение этому можно наблюдать в природе: многие плоды и ягоды имеют форму шара или близкую к ней, например арбуз, апельсин, смородина. Шаровидная форма повсеместно используется в технике. Форму шара имеет наша планета и большинство космических тел. А так как планеты, Солнце, Луна и звёзды движутся по воображаемой «небесной сфере», то естественно, для изучения их движения потребовалось знание геометрии сферы.

Сферическая геометрия возникла при решении задач астрономии. Эти задачи были необходимы, например, путешественникам и мореплавателям, которые ориентировались по звёздам. Сведения о сфере были необходимы и при решении сугубо земных задач – вычислении географических координат, для составления географических карт, для нахождения курса корабля.

В настоящее время, существуют различные науки в основе которых лежит сферическая геометрия. Например, математическая картография изучает способы отображения поверхности Земли на плоскости. Поскольку поверхность Земли (приблизительно сферическая) имеет конечную кривизну, её нельзя отобразить на плоскость с сохранением всех пространственных отношений одновременно: углов между направлениями, расстояний и площадей поверхностей. Можно сохранить только некоторые из этих соотношений. Важное понятие в математической картографии – картографическая проекция, то есть функция, задающая отображение географических координат точек на поверхности Земли на декартовы координаты на плоскости. Область картографии – составление и оформление карт. Другой значительный раздел математической картографии – картометрия, которая позволяет по данным карты измерять расстояния, углы и площади на реальной поверхности Земли.

Автором первого сочинения о «сферике» (так называли сферическую геометрию древние греки) был, по-видимому, математик и астроном Евдокс Книдский (ок. 408–355 гг. до н. э.). Но самым значительным произведением была «Сферика» греческого учёного Менелая Александрийского, жившего в I в., который обобщил результаты своих предшественников и получил много новых результатов. Его книга, построенная аналогично «Началам» Евклида, долгое время служила учебником для астрономов. В IX – XIII вв. Основы сферической тригонометрии были заложены греческим математиком и астрономом Гиппархом во II веке до н. э. Как самостоятельная дисциплина сферическая тригонометрия сформировалась в работах средневековых математиков стран ислама. История сферической тригонометрии в Европе связана с трудами таких учёных, как Региомонтан, Николай Коперник, Франческо Мавролико. Подробнее об истории сферической геометрии и о ее использовании можно прочитать в книге [3].

В сферической геометрии имеют место аналоги основных теорем евклидовой геометрии. Однако доказательства таких теорем не всегда приводятся. Поэтому нашей задачей были подробные доказательства основных теорем сферической геометрии, доступные школьникам старших классов. При изложении темы мы использовали книги [1] и [2]. Другие подходы к доказательствам теорем можно найти в лекциях [5].

1. Основные понятия сферической геометрии

Сферическая геометрия – математическая дисциплина, изучающая геометрические образы, находящиеся на сфере, подобно тому как планиметрия изучает геометрические образы, находящиеся на плоскости.

Сферой называется геометрическое место точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки, называемой её центром.

Отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо его точкой, называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий де точки сферы и проходящий, кроме того, через его центр, называется диаметром. Из определения следует, что все радиусы равны и что диаметр равен удвоенному радиусу. Плоскость, проходящая через центр сферы, называется диаметральной плоскостью.

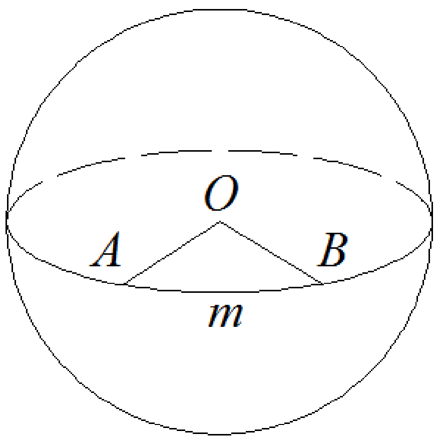


Рис. 1. Сфера

Всякая плоскость, пересекающая сферу, дает в сечении некоторую окружность; если секущая плоскость проходит через центр O сферы, то в сечении получается большая окружность. Через каждые две точки A и B на сфере, кроме случая диаметрально противоположных точек, можно провести единственную большую окружность.

Прямые и отрезки на сфере. Большие окружности сферы являются ее геодезическими линиями и поэтому в сферической геометрии играют роль, аналогичную прямым в евклидовой планиметрии. *Отрезки* в сферической геометрии – это дуги больших окружностей.

Расстояние на сфере между точками A и B определяется как длина более короткой дуги AmB. Это расстояние равно $r\varphi$, где φ – угол AOB и r – это радиус сферы.

Роль окружностей в сферической геометрии играют так называемые малые окружности, т. е. сечения сферы плоскостями, не проходящими через ее центр. *Сферической окружностью* называется множество точек сферы, удалённых от некоторой точки сферы (центра окружности) на данное расстояние ρ (радиус сферической окружности).

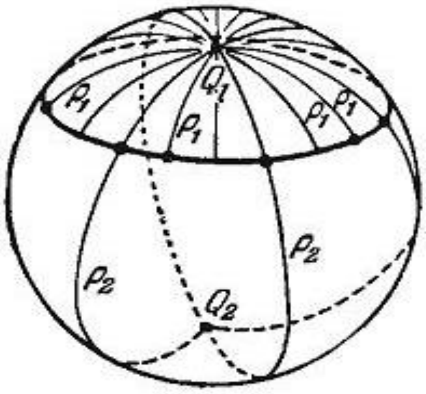


Рис. 2. Малые окружности сферы

Ясно, что любую окружность в сферической геометрии можно определить, как множество точек, удаленных от фиксированной точки Q на постоянное расстояние ρ; точка Q называется при этом *полюсом окружности*, а расстояние ρ – ее *радиусом*. У каждой окружности на сфере имеются два полюса Q_1, Q_2 (рис 2), являющихся диаметрально противоположными точками сферы, и соответственно этому два радиуса ρ_1, ρ_2. Если эти радиусы различны, то имеем малую окружность, если же они совпадают (и равны $\frac{\pi r}{2}$), то – большую окружность.

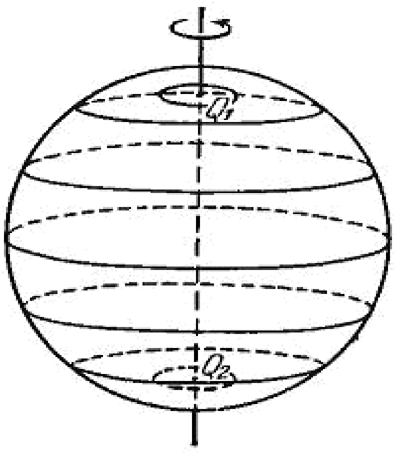


Рис. 3. Вращения сферы

Большие и малые окружности сферы аналогичны прямым и окружностям на плоскости еще и в том отношении, что существуют движения сферы (повороты, рис.3), переводящие их в себя. Из этого ясно, что большие и малые окружности являются "однородными" линиями, т. е. во всех своих точках они устроены совершенно одинаково.

Под *расстоянием* между двумя точками на сфере понимается длина меньшей из двух дуг большой окружности, соединяющей эти точки, то есть дуги AmB (рис.1) большого круга. Длина дуги пропорциональна центральному углу AOB. Это определение следует видоизменить лишь для случая диаметрально противоположных точек A и A_1 сферы; для них существует бесконечно много соединяющих их дуг больших окружностей, и все они имеют одну и ту же длину πr (где r – радиус сферы), которую и принимаем за расстояние между A и A_1.

При пересечении двух больших кругов на сфере образуются четыре *сферических двуугольника* (рис. 4). Сферический двуугольник – это фигура новая, раннее не встречающаяся. Она определяется заданием своего угла.

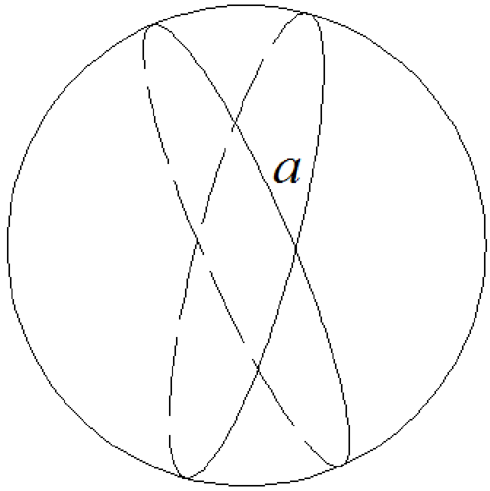


Рис. 4. Сферические двуугольники

Роль треугольников и многоугольников в сферической геометрии играют *сферические треугольники* и многоугольники, образованные дугами больших окружностей

Три больших окружности, не пересекающихся в одной паре диаметрально противоположных точек, образуют на сфере восемь сферических треугольников (рис. 5). Зная элементы (углы и стороны) одного из них, легко определить элементы всех остальных.

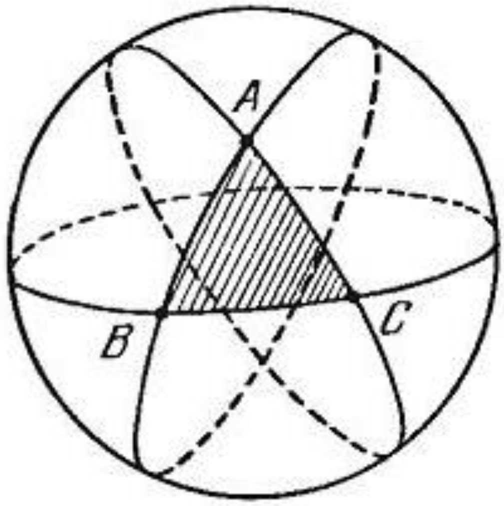


Рис. 5. Сферические треугольники

Поэтому обычно рассматривают соотношения между элементами лишь одного треугольника, притом того, все стороны которого меньше половины большого круга (такие треугольники называются *эйлеровыми* треугольниками).

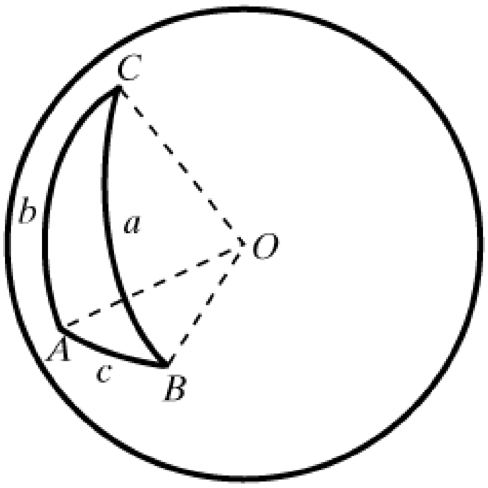


Рис. 6. Элементы сферического треугольника

Стороны *a, b, c* сферического треугольника измеряются плоскими углами трехгранного угла *OABC* (рис.6), углы *A, B, C* треугольника – двугранными углами того же трехгранного угла. Свойства сферических треугольников во многом отличаются от свойств треугольников на плоскости (прямолинейных треугольников). Так, к известным трем случаям равенства прямолинейных треугольников для треугольников на сфере добавляется еще четвертый: два треугольника равны, если равны их соответствующие углы (на сфере не существует подобных треугольников).

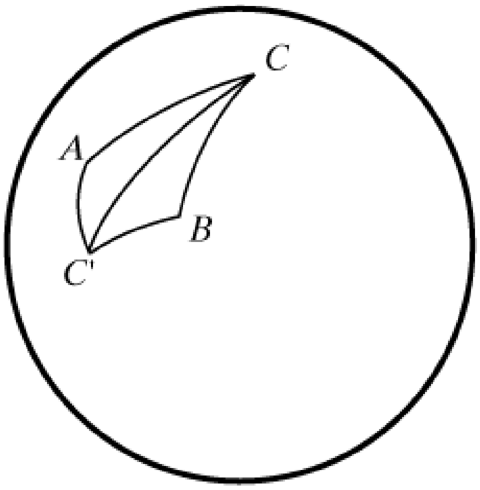


Рис. 7. Симметричные сферические треугольники $AC'C$ и BCC'

Равными треугольниками считаются те, которые могут быть совмещены после передвижения по сфере. Равные сферические треугольники имеют равные элементы и одинаковую ориентацию. Треугольники, имеющие равные элементы и различную ориентацию, называются *симметричными*; таковы, например, треугольники *AC'C* и *BCC'* на рис.7.

Во всяком сферическом треугольнике каждая сторона меньше суммы и больше разности двух других; сумма всех сторон всегда меньше 2π. Сумма углов сферического треугольника всегда меньше 3π и больше π. Разность

$$S - \pi = \varepsilon,$$

где S – сумма углов сферического треугольника, называется *сферическим избытком*.

Теорема 1. *Область на сфере не может быть изометрична области на плоскости.*

Напомним, что *изометрия* – это отображение областей, сохраняющее расстояние между точками.

Доказательство теоремы. Сферической окружностью называется множество точек сферы, удалённых от некоторой точки сферы (центра окружности) на данное расстояние ρ (радиус сферической окружности). Если отрезок OX виден из центра сферы под углом α, то сферическая окружность с центром O, проходящая через точку X, имеет сферический радиус $r\alpha$, а евклидов радиус этой окружности равен $r \sin \alpha$.Таким образом, сферическая окружность радиуса $\rho = r\alpha$ имеет длину

$$2\pi\, r \sin(\alpha) = 2\pi\, r \sin\left(\frac{\rho}{r}\right) < 2\pi\, r \left(\frac{\rho}{r}\right) = 2\pi\rho.$$

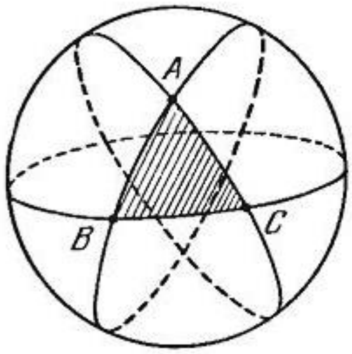
Любая область на сфере содержит сферическую окружность достаточно малого радиуса ρ. Длина этой сферической окружности меньше длины евклидовой окружности радиуса ρ. Если бы изометрия существовала, то при ней окружность радиуса ρ должна перейти в окружность того же радиуса, причем длина ее останется прежней. *Это и доказывает утверждение теоремы.*

Теорема 2. *Площадь сферического треугольника определяется по формуле*

$$S = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2,$$

где r *– радиус сферы.*

Доказательство. Рассмотрим сначала сферический двуугольник, т. е. одну из четырех фигур, на которые разбивают сферу две сферические прямые (Рис. 4). Пусть $S(\alpha)$ – площадь сферического двуугольника с углом α. Ясно, что $S(\alpha)$ пропорциональна углуα и $S(\pi) = 2\pi r^2$ (площадь полусферы). Поэтому $S = 2\alpha r^2$. Пары сферических прямых *AB, BC* и *CA* образуют 12 сферических двуугольников.



Выберем из них 6 сферических двуугольников, содержащих либо треугольник *ABC*, либо симметричный ему (относительно центра сферы) треугольник $A_1B_1C_1$. Площадь поверхности, которая покрыта этими двуугольниками можно найти по формулам:

$$S = 2 \cdot 2\alpha r^2 + 2 \cdot 2\beta r^2 + 2 \cdot 2\gamma r^2 = 4(\alpha + \beta + \gamma)r^2,$$

где α, β, γ – углы двуугольников. $4\pi r^2$.Каждая точка треугольника *ABC*и треугольника $A_1B_1C_1$ покрыта ровно тремя такими двуугольниками, а любая другая точка сферы покрыта ровно одним двуугольником. Поэтому площадь поверхности, которая покрыта этими двуугольниками равна площади сферы $4\pi r^2$и еще две площади треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$:

$$S = 4\pi r^2 + 2S_{ABC} + 2S_{A_1B_1C_1}.$$

Приравнивая правые части формул, получаем равенство:

$$4(\alpha + \beta + \gamma)r^2 = 4\pi r^2 + 2S_{ABC} + 2S_{A_1B_1C_1},$$

А так как $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$, то

$$S_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2,$$

что и требовалось доказать.

Расстояние на сфере

Расстояние на сфере между точками A и B определяется как длина более короткой дуги AmB (Рис. 1). Это расстояние равно $r\varphi$, где φ – угол AOB и r – это радиус сферы.

Выведем формулу расстояния на сфере через евклидовы координаты x, y, z в объемлющем трехмерном пространстве. Напомним, что расстояние OM от начала координат O до произвольной точки M с координатами x, y, z определяется формулой: $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Если радиус нашей сферы равен r, то координаты всех точек сферы удовлетворяют условию: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Расстояние M_1M_2 между двумя произвольными точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ пространства определяется по общей формуле:

$$M_1{M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

А угол φ между двумя отрезками OM_1 и OM_2, исходящими из точки O – из формулы:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{1}{r^2}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2).$$

Расстояние же ω между этими точками, измеренное по большой окружности сферы, в соответствии с соглашениями, принятыми в сферической геометрии, равно углу φ между отрезками OM_1 и OM_2, умноженному на радиус r сферы; поэтому расстояние ω находится из формулы

$$\cos\frac{\omega}{r} = \frac{1}{r^2}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2).$$

2.Теорема косинусов

В классической евклидовой геометрии имеет место следующая хорошо известная теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

где A – это угол треугольника против стороны a. Вариант этой теоремы имеет место и в сферической геометрии.

Теорема 3 (косинусов). *Косинус одной стороны сферического треугольника равняется произведению косинусов двух других его сторон плюс произведение синусов тех же сторон на косинус угла между ними:*

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

Доказательство. Рассмотрим сферический треугольник ABC, вершины которого соединяем с центром O (рис. 8).

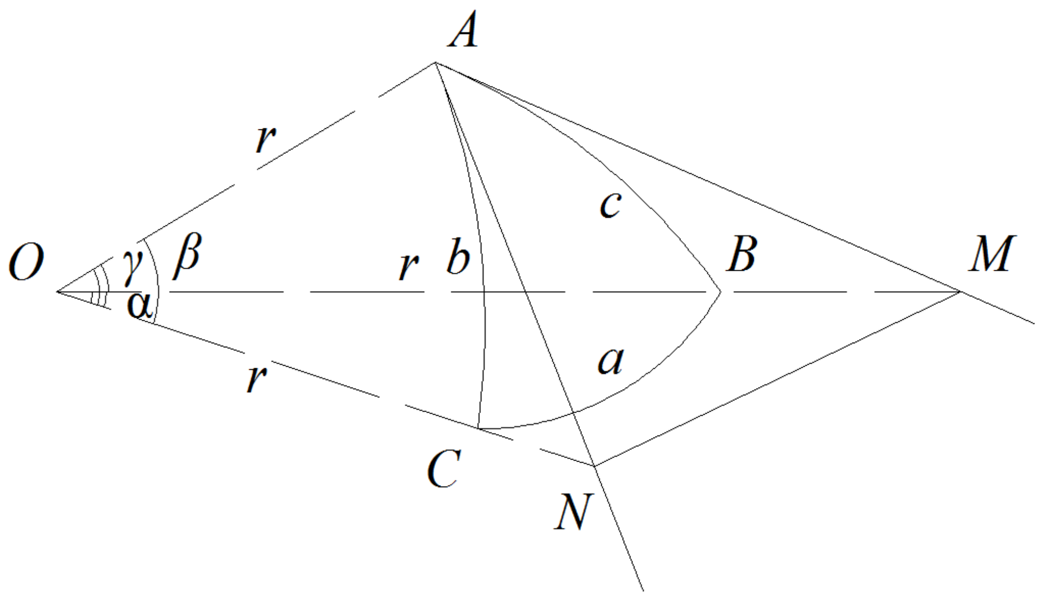


Рис. 8. Случай, когда стороны $b < \frac{\pi}{2}r$ и $c < \frac{\pi}{2}r$

Предположим, что радиус сферы r, стороны сферического треугольника b и c каждая меньше $\frac{\pi}{2}r$. (Отметим, что сторона a может быть больше $\frac{\pi}{2}r$!). Проведём из точки A касательные к сторонам сферического треугольника AB и AC; одна из них будет лежать в плоскости AOC, а другая – в плоскости AOB; в силу наложенного ограничения эти касательные пересекут продолженные радиусы OB и OC в точках M и N.

На основании теоремы плоской тригонометрии: «квадрат стороны треугольника равняется сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними».

Из треугольника *MAN* имеем:

$$MN^2 = AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cos A.$$

Из треугольника *OMN* имеем:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos \alpha,$$

где α – угол *COB*

Из сравнения этих двух равенств вытекает:

$$AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cos A = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos \alpha,$$

откуда

$$2OM \cdot ON \cos \alpha = OM^2 + ON^2 - AN^2 - AM^2 + 2AN \cdot AM \cos A.$$

Из прямоугольного треугольника ОМА видим, что

$$OM^2 - AM^2 = OA^2,$$

Из прямоугольного треугольника *ONA* видим, что

$$ON^2 - AN^2 = OA^2,$$

После соответствующих подстановок получаем:

$$2 \cdot OM \cdot ON \cos \alpha = 2OA^2 + 2AN \cdot AM \cos A,$$

Разделив обе части равенства на $2 \cdot OM \cdot ON$, получим:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OM} \cdot \frac{OA}{ON} + \frac{AN}{ON} \cdot \frac{AM}{OM} \cdot \cos A.$$

Из чертежа видно, что

$$\frac{OA}{OM} = \cos \gamma\,; \qquad \frac{OA}{ON} = \cos \beta\,; \qquad \frac{AN}{ON} = \sin \beta\,; \qquad \frac{AM}{OM} = \sin \gamma\,;$$

где γ – угол *AOB*, β – угол *AOC*.

Делая замену отношений $\frac{OA}{OM}, \frac{OA}{ON}, \frac{AN}{ON}$ и $\frac{AM}{OM}$ полученными тригонометрическими функциями, получим окончательно:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

Обобщим теперь выведенную формулу для случая, когда какая-либо из сторон b и c больше $\frac{\pi}{2} r$, или каждая из них больше $\frac{\pi}{2} r$.

Предположим, что $b > \frac{\pi}{2}r$ и $c > \frac{\pi}{2}r$ (рис.9).

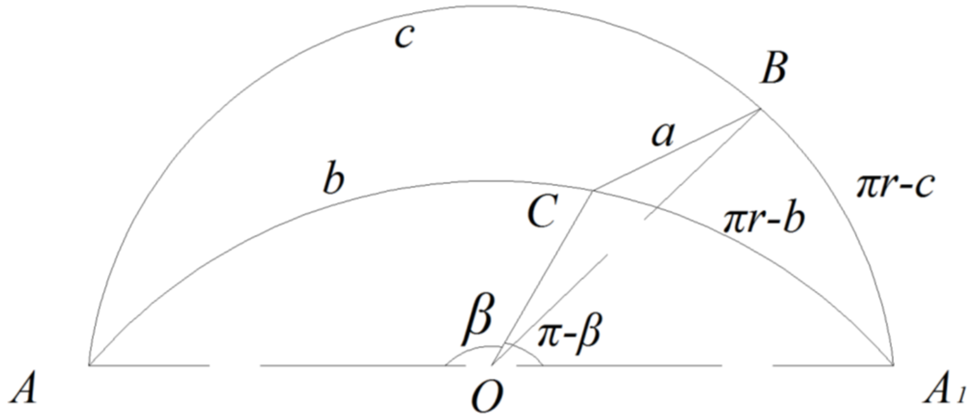


Рис.9. Случай, когда стороны $b > \frac{\pi}{2}r$ и $c > \frac{\pi}{2}r$

Продолжим стороны сферического треугольника c и b до их пересечения в точке A_1, тогда в сферическом треугольнике BCA_1 стороны $(\pi r - b) < \frac{\pi}{2}r$ и $(\pi r - c) < \frac{\pi}{2}r$, угол $COA_1 = \pi - \beta$, угол $BOA_1 = \pi - \gamma$ и угол $COB = \alpha$. Поэтому на основании предшествующей формулы пишем для треугольника BCA_1:

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta)\cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta)\sin(\pi - \gamma)\cos A_1,$$

угол A равен углу A_1, поэтому имеем:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

Теперь предположим, что $b > \frac{\pi}{2}r$ и $c < \frac{\pi}{2}r$ (рис.10).

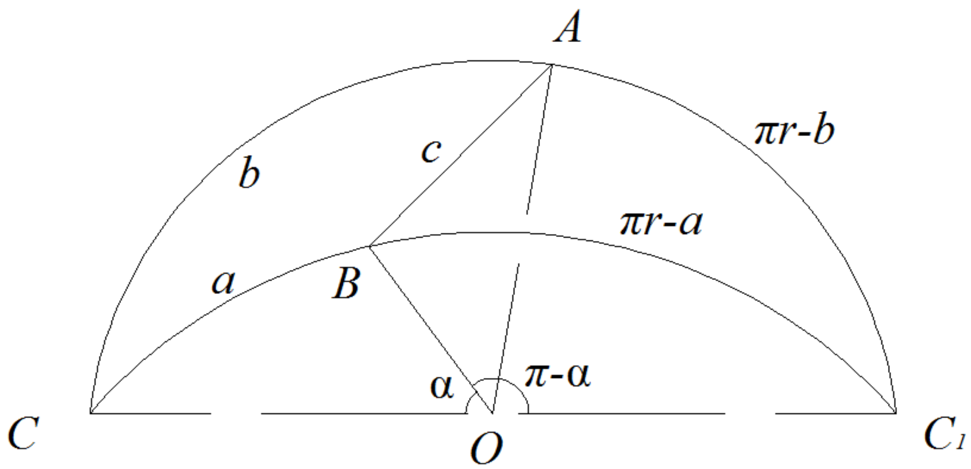


Рис.10. Случай, когда стороны $b > \frac{\pi}{2}r$ и $c < \frac{\pi}{2}r$

Предположим сначала, что $b > \frac{\pi}{2} r, c < \frac{\pi}{2} r$ (рис.10). Продолжим стороны b и a сферического треугольника до их пересечения в точке C_1, тогда получим сферический треугольник BAC_1, у которого стороны $c < \frac{\pi}{2} r$, $(\pi r - b) < \frac{\pi}{2} r$, угол $BOC_1 = \pi - \alpha$, угол $AOC_1 = \pi - \beta$, а угол треугольника BAC_1, при вершине A равен $\pi - A$. Значит, на основании выведенной формулы мы можем написать:

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta)\cos\gamma + \sin(\pi - \beta)\sin\gamma\cos(\pi - A),$$

$$-\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

Что и требовалось доказать

Предельный переход к евклидовой геометрии

Напомним, что $\alpha = \frac{a}{r}, \beta = \frac{b}{r}, \gamma = \frac{c}{r}$. Тогда мы получаем следующий вариант теоремы косинусов:

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A.$$

Покажем, что при $r \to \infty$ полученная формула превращается в обычную формулу теоремы косинусов. Для этого будем использовать разложение функций в ряды Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}x, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Если радиус r большой сравнительно с длинами a, b и c треугольника, то значения $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}$ и $\frac{c}{r}$ можно считать малыми, поэтому в разложениях в ряды Тейлора можно ограничиться несколькими членами, остальные слагаемые будут малыми более высокого порядка. Заменим функции $\cos\frac{a}{r}$, $\cos\frac{b}{r}$ и остальные первыми слагаемыми их рядов Тейлора:

$$\cos\frac{a}{r} \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad \sin\frac{b}{r} \approx \frac{b}{r} - \frac{1}{3!}\left(\frac{b}{r}\right)^3.$$

Получим:

$$1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{b}{r}\right)^2\right)\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{c}{r}\right)^2\right) +$$

$$+\left(\frac{b}{r} - \frac{1}{3!}\left(\frac{b}{r}\right)^3\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{1}{3!}\left(\frac{c}{r}\right)^3\right)\cos A,$$

$$1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{c}{r}\right)^2 - \frac{1}{2!}\left(\frac{b}{r}\right)^2 + \frac{b^2c^2}{2\cdot 2!\,r^4} +$$

$$+\frac{bc}{r^2}\cdot\cos A - \frac{b}{r3!}\left(\frac{c}{r}\right)^3\cdot\cos A - \frac{c}{r3!}\left(\frac{b}{r}\right)^3\cdot\cos A + \frac{b^3c^3}{2\cdot 3!\,r^6}\cos A,$$

Сократим единицы и умножим обе части на $2r^2$. Получаем:

$$-a^2 = -c^2 - b^2 + \frac{b^2c^2}{2r^2} + 2bc\cos A - \frac{bc^3}{3r^2}\cos A - \frac{cb^3}{3r^2}\cos A + \frac{c^3b^3}{6r^4}\cos A$$

Так как $r \to \infty$, то $\frac{b^2c^2}{2r^2} \to 0$, $\frac{bc^3}{3r^2}\cos A \to 0$, $\frac{cb^3}{3r^2}\cos A \to 0$, $\frac{c^3b^3}{6r^4}\cos A \to 0$, получим:

$$-a^2 = -c^2 - b^2 + 2bc\cos A,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

3.Теорема синусов

В классической евклидовой геометрии имеет место следующая хорошо известная теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

где a, b и c – это длины сторон треугольника, а α, β и γ – это углы треугольника, лежащие против сторон a, b и c, соответственно. Вариант этой теоремы имеет место и в сферической геометрии.

Теорема 4. *Синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:*

$$\frac{\sin a/r}{\sin \alpha} = \frac{\sin b/r}{\sin \beta} = \frac{\sin c/r}{\sin \gamma}.$$

Доказательство. Используем следующий рисунок 11, где стороны сферического треугольника a и c не превосходят $\pi r/2$ и $OB = OC = OA = r$.

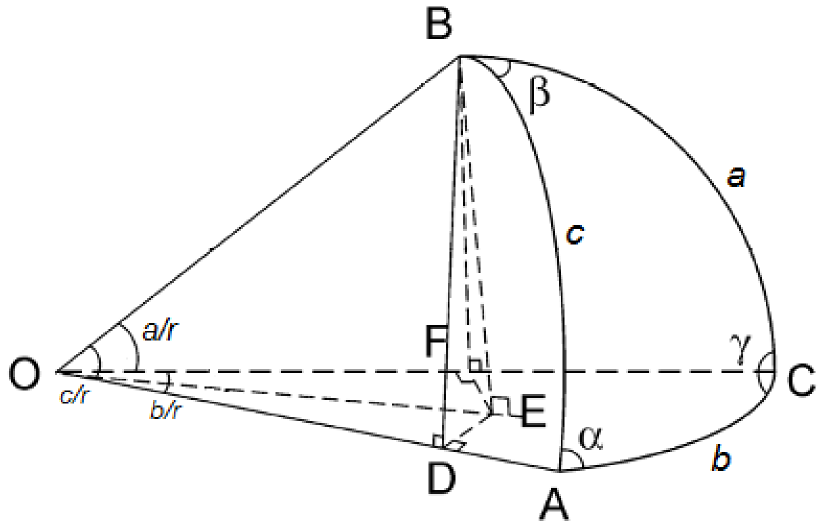


Рис. 11. Теорема синусов.

Следующие формулы очевидны:

$$BD \perp OA; BF \perp OC;\ \angle BDE = \alpha;\ \angle BFE = \gamma.$$

$$\text{В } \Delta BDE\text{: } \frac{BE}{BD} = \sin \alpha \Rightarrow BE = BD \sin \alpha\ ;$$

$$\text{В } \Delta BFE\text{: } \frac{BE}{BF} = \sin \gamma \Rightarrow BE = BF \sin \gamma\ ;$$

$$\text{В } \Delta BDO\text{: } \frac{BD}{OB} = \sin c/r \Rightarrow BD = OB \sin c/r\ ;$$

$$\text{В } \Delta BFO\text{: } \frac{BF}{OB} = \sin \alpha \Rightarrow BF = OB \sin \alpha\ ;$$

$$BD \sin \alpha = BF \sin \gamma\ ;$$

$$OB \sin c/r \sin \alpha = OB \sin \alpha \sin \gamma\ ;$$

$$\frac{\sin a/r}{\sin \alpha} = \frac{\sin c/r}{\sin \gamma};$$

Аналогично:

$$\frac{\sin a/r}{\sin \alpha} = \frac{\sin b/r}{\sin \beta}.$$

Если элементы сферического треугольника больше $\frac{\pi}{2}$ т. е., например, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, то используя равенство $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ и $0° \leq (\pi - \alpha) \leq \frac{\pi}{2}$, и мы сводим доказательство к рассмотренному случаю так же, как и в доказательстве теоремы косинусов.

Замечание. Если радиус r большой сравнительно с длинами a, b и c треугольника, то значения $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}$ и $\frac{c}{r}$ можно считать малыми, поэтому функции $\sin\frac{a}{r}$ и $\sin\frac{b}{r}$ можно заменить несколькими первыми слагаемыми их рядов Тейлора (как это делалось в предыдущем разделе). Переходя далее к пределу при $r \to \infty$, мы получаем в теорему синусов евклидовой геометрии.

Второе доказательство

Формулу синусов можно вывести из формулы косинусов. В следующих вычислениях будем считать для простоты, что радиус сферы равен 1, $r = 1$:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

Решаем это уравнение относительно A:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Обе части этого равенства возведём в квадрат:

$$\cos^2 A = \frac{\cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

и вычтем каждую часть из единицы:

$$1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Разделим обе части равенства на $\sin^2 a$и введём вместо синусов в числителе второй части равенства косинусы

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} =$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Раскроем скобки и сделаем сокращения:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} =$$
$$= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},$$
$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} == \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Выражение, стоящее в правой части равенства, симметрично относительно элементов a, b, c и не изменит своей величины от круговой перестановки букв. Очевидно если мы произведём такие же вычисления для $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 \beta}$ и $\frac{\sin^2 C}{\sin^2 \gamma}$, получим в правой части то же выражение, поэтому

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 \gamma}.$$

Откуда имеем:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Литература:

1. Степанов Н. Н. Сферическая тригонометрия. М. – Л.: ОГИЗ, 1948.

2. Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского. МЦНМО, 2004.

3. Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии. Развитие понятия о геометрическом пространстве. М. Наука., 1976. – 408с.

4. Энциклопедия элементарной математики. Кн. 4 – Геометрия. М., 1963.

5. Тужилин А.А. Элементы сферической геометрии (Лекции А.А.Тужилина в весеннем семестре 2014 г). http://dfgm.math.msu.su/people/tuzhilin/part5.php и http://dfgm.math.msu.su/files/0ngit/tuzhilin/2015/Lecture6.pdf